

UNIVERSITATEA TITU MAIORESCU
Facultatea de INFORMATICĂ

**Conf. univ. dr.
VALENTIN GÂRBAN**

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Curs pentru învățământul la distanță



BUCUREȘTI – 2015

CUPRINS	2
ANALIZĂ MATEMATICĂ.....	5
UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 1 - Șiruri și serii de numere și de funcții.....	6
Lecția 1 - Șiruri de numere reale. Puncte limită. Convergență.....	8
Șiruri de numere reale.....	8
Șiruri în $\square^k$	10
Probleme rezolvate.....	12
Test de autoevaluare.....	19
Lecția 2 - Serii de numere reale și complexe. Criterii de convergență. Proprietăți.....	20
Serii de numere reale.....	20
Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergență.....	21
Serii cu termeni oarecare. Serii absolut convergente, alternate, semiconvergente.....	26
Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare	27
Operații cu serii numerice.....	28
Serii în $\square^k$. Serii de numere complexe.....	29
Probleme rezolvate.....	31
Test de autoevaluare.....	43
Temă de control.....	44
Lecția 3 - Șiruri de funcții. Serii de funcții.....	46
Șiruri de funcții.....	46
Serii de funcții.....	49
Probleme rezolvate.....	52
Test de autoevaluare.....	59
Lecția 4 - Serii de puteri.....	60
Serii de puteri.....	60
Operații cu serii de puteri.....	62
Serii Taylor și Mac-Laurin.....	63
Probleme rezolvate.....	63
Test de autoevaluare.....	69
Temă de control.....	70
Bibliografie pentru Unitatea de învățare nr.1.....	72
UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 2 – Calcul diferențial în $\square^n$	73
Lecția 5 - Funcții vectoriale de variabilă vectorială. Limite. Continuitate.....	74
Funcții vectoriale. Limite. Continuitate.....	74
Derivate parțiale de ordinul I.....	77
Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiabilitate, diferențiala	79
Formula lui Taylor pentru funcții de două variabile.....	83
Extremele libere ale funcțiilor de mai multe variabile.....	84
Probleme rezolvate.....	85
Test de autoevaluare.....	100

Lecția 6 - Funcții implicite. Extreme condiționate.....	101
Funcții implicite.....	101
Dependență funcțională.....	102
Extreme condiționate.....	103
Probleme rezolvate.....	105
Schimbări de variabile și de funcții. Probleme rezolvate.....	113
Test de autoevaluare.....	118
Temă de control.....	119
Bibliografie pentru Unitatea de învățare nr.2.....	121

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 3 – Integrale improprii și integrale cu parametri..122

Lecția 7 - Integrale improprii.....	124
Definiții și proprietăți ale integralelor improprii.....	124
Integrale improprii din funcții pozitive.....	127
Integrale improprii din funcții oarecare.....	129
Integrale improprii și serii numerice.....	130
Probleme rezolvate.....	131
Test de autoevaluare.....	136

Lecția 8 - Integrale cu parametri.....	138
Integrale cu parametri pe intervale compacte.....	138
Integrale improprii cu parametri.....	139
Integrala lui Euler de speța a doua.....	142
Integrala lui Euler de prima speță.....	143
Probleme rezolvate.....	145
Test de autoevaluare.....	150
Temă de control.....	151
Bibliografie pentru Unitatea de învățare nr.3.....	154

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 4 – Integrale curbilinii, integrale multiple, Integrale de suprafață, formule integrale.....155

Lecția 9 - Integrale curbilinii.....	156
Noțiuni teoretice.....	156
Probleme rezolvate.....	160
Test de autoevaluare.....	170
Temă de control.....	172

Lecția 10 – Integrala dublă.....	174
Noțiuni teoretice.....	174
Probleme rezolvate.....	180
Test de autoevaluare.....	187

Lecția 11 – Integrala triplă.....	189
Noțiuni teoretice.....	189
Probleme rezolvate.....	195
Test de autoevaluare.....	206

Lecția 12 – Integrale de suprafață.....	208
Noțiuni teoretice.....	208
Probleme rezolvate.....	214
Test de autoevaluare.....	226
Lecția 13 – Formule integrale.....	228
Noțiuni teoretice.....	228
Probleme rezolvate.....	230
Test de autoevaluare.....	242
Temă de control.....	244
Bibliografie pentru Unitatea de învățare nr.4.....	246
Chestionar feedback.....	247

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Analiza matematică este una din disciplinele de bază care, pentru profilul INFORMATICĂ, este impusă de către Agenția Națională pentru Asigurarea Calității în Învățământul Superior (ARACIS) ca esențială pentru pregătirea studenților și pentru depășirea procedurilor de evaluare și acreditare. Modul de prezentare a acestui material are în vedere particularitățile învățământului la distanță, la care studiul individual este determinant. Pentru orice nelămuriri față de acest material vă rugăm să contactați tutorele de disciplină care are datoria să vă ajute oferindu-vă toate explicațiile necesare.

Disciplina de Analiză matematică își propune următoarele obiective specifice:

- Însușirea noțiunilor fundamentale și a algoritmilor specifici de rezolvare a problemelor privind șiruri și serii numerice și de funcții, limită, continuitate, calcul diferențial (una sau mai multe variabile), calcul integral;
- Formarea și dezvoltarea bazei matematice a studenților pentru disciplinele fundamentale și de specialitate din anii superiori;
- Formarea și dezvoltarea aptitudinilor și deprinderilor de analiză logică, formulare corectă și argumentare fundamentată, în rezolvarea problemelor tehnico-economice și de specialitate;
- Formarea și dezvoltarea capacităților de abstractizare, generalizare și sinteză;
- Identificarea corectă a tuturor dimensiunilor unei probleme matematice precum și a procedurilor ce pot fi utilizate pentru rezolvarea acesteia;
- O comparație critică a metodelor de rezolvare evidențiind, eventual, calea optimă de soluționare.

Vă precizăm de asemenea că, din punct de vedere al verificărilor și al notării, cu adevărat importantă este capacitatea pe care trebuie să o dobândiți și să o probați de a rezolva toată tipologia de probleme aplicative aferente materialului teoretic prezentat în continuare. De aceea vă recomandăm să parcurgeți cu atenție toate problemele rezolvate, să rezolvați problemele propuse prin testele de autoevaluare și temele de control; fiți convinși că examenul final apelează la tipurile de probleme prezente în secțiunile menționate anterior.

SUCCES!

Coordonator disciplină: Conf. univ. dr. Valentin Gârban
Tutori: Asist. univ. drd. Zafir Veronica

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 1 –

ȘIRURI ȘI SERII DE NUMERE ȘI DE FUNCȚII

Obiective urmărite:

1. Însusirea noțiunilor fundamentale din domeniul șirurilor și seriilor de numere și de funcții.
2. Formarea și dezvoltarea bazei matematice a studenților pentru disciplinele fundamentale și de specialitate din anii superiori;
3. Formarea deprinderilor de modelare matematică a unor probleme de natură informatică, tehnică sau economică, cu utilizarea cunostințelor însușite.

Rezumat:

În această unitate de învățare sunt prezentate, pe parcursul primelor două lecții, principalele noțiuni cu caracter teoretic referitoare la șirurile și seriile de numere reale ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^k$) și de numere complexe ($\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^k$) și algoritmi specifici de rezolvare a problemelor care se referă la șiruri și serii de numere:

- noțiunile de convergență și limită a unui șir de numere (reale sau complexe) și de convergență și sumă a unei serii de numere;
- criterii de convergență pentru șiruri și serii de numere (reale, complexe din $\mathbb{C}^k$);
- algoritmi pentru calculul limitelor de șiruri, în corelație cu criteriile de convergență studiate;
- metode de calcul pentru determinarea sumei a numeroase clase de serii numerice convergente.

În următoarele două lecții sunt prezentate principalele noțiuni teoretice referitoare la convergența șirurilor și seriilor de funcții, a seriilor Taylor și de puteri, precum și algoritmi cei mai des întâlniți pentru rezolvarea problemelor specifice referitoare la tematica acestor lecții:

- convergența simplă și uniformă a șirurilor și seriilor de funcții, asemănările și deosebiri dintre aceste noțiuni;
- transferul proprietăților de continuitate, derivabilitate, integrabilitate, existență a primitivelor termenilor șirurilor și seriilor de funcții uniform convergente asupra funcției limită, respectiva sumei seriei;
- criterii, metode și algoritmi de rezolvare a problemelor de convergență simplă și uniformă a șirurilor și seriilor de funcții și aplicații ale lor;
- un studiu dezvoltat al seriilor de puteri și al seriilor Taylor și Mac-Laurin, cuprinzând rezultatele fundamentale referitoare la raza, intervalul și mulțimea lor de convergență și natura convergenței lor pe mulțimea de convergență, proprietățile sumei unei serii de puteri pe intervalul de convergență, (continuitate, derivabilitate, mărginire, integrabilitate Riemann, existența primitivelor), aplicarea acestor proprietăți la calculul sumei unei serii de puteri și la dezvoltarea a numeroase funcții uzuale în serie de puteri.

Organizarea materialului este următoarea:

- la începutul fiecărei lecții sunt prezentate pe scurt principalele rezultate teoretice, formule și algoritmi de rezolvare pentru problemele specifice temei studiate;

- urmează un număr semnificativ de probleme rezolvate, care acoperă întreaga gamă a noțiunilor teoretice și algoritmilor de rezolvare prezentați anterior;
- în finalul fiecărei lecții este propus un test de autoevaluare și la sfârșitul unității de învățare una sau două teme de control, problemele propuse fiind variate și ordonate după gradul lor de dificultate și acoperind întreaga tematică studiată în unitatea de învățare respectivă.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul unității de învățare, inclusiv în porțiunea referitoare la aplicații. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Se recomandă întocmirea unui caiet de probleme. Pentru fiecare tip de exercițiu se recomandă identificarea algoritmului și descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluțiilor problemelor rezolvate și rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare și în temele de control propuse.

Cuvinte cheie:

Convergență și limită a unui șir de numere (reale sau complexe) sau de funcții, convergență și sumă a unei serii de numere sau de funcții, convergența simplă și uniformă a șirurilor și seriilor de funcții; serii de puteri, serii Taylor, serii Mac-Laurin, rază, interval și multime de convergență, transferul proprietăților termenilor asupra limitei sau sumei.

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar parcurgerii și însușirii noțiunilor teoretice, algoritmilor practici de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare și dobândirii competențelor anunțate este de aproximativ 2-3 ore de studiu pentru fiecare lecție, într-un ritm constant, pe toată durata semestrului. Se adaugă un timp mediu aproximativ egal pentru rezolvarea Testelor de autoevaluare și a Temelor de control.

LECȚIA 1 - ȘIRURI DE NUMERE REALE. PUNCTE LIMITĂ. CONVERGENȚĂ

1. Șiruri de numere reale

Definiția 1.1.1. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale. Un număr real a se numește **punct limită** al șirului considerat, dacă în orice vecinătate a sa se află o infinitate de termeni ai șirului.

Notându-se cu L mulțimea punctelor limită pentru șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, marginea superioară a mulțimii L se va numi **limita superioară** a șirului, iar marginea inferioară a mulțimii L se va numi **limita inferioară** a șirului considerat.

Se va scrie: $\sup(L) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n)$ și $\inf(L) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n)$.

Exemple

1) Șirul cu termenul general $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, are ca puncte limită pe $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$.

2) Șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, va avea $L = \{0\}$, deci $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 0$, șirul fiind convergent.

Definiția 1.1.2. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **convergent**, dacă există un număr x , astfel încât pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru $(\forall) n \geq n(\varepsilon)$ să se verifice $|x_n - x| < \varepsilon$.

Numărul real x cu proprietatea de mai sus se numește **limita șirului** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și se va scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$.

Dacă un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, limitele sale superioară și inferioară sunt egale.

Definiția 1.1.3. Un șir care are limita infinită sau un șir pentru care cele două limite, inferioară și superioară, sunt diferite se numește **șir divergent**.

Teorema lui Weierstrass. Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Teorema Cesaro-Stolz. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oarecare și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton crescător de numere pozitive, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Atunci, dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell$, va exista și

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ și cele două limite vor avea aceeași valoare.

Consecința 2. Dacă $(a_n)_n, (b_n)_n$ sunt două șiruri de numere reale cu proprietățile:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \infty$, $b_n \in \mathbb{N}_+^*$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$;

$$2) (\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

$$\text{Atunci } (\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n}{b_1 + \dots + b_n} = a.$$

Criteriul radicalului

Dacă şirul $(a_n)_n$ este convergent şi are termenii pozitivi, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Indicație de rezolvare:

Se aplică teorema Cesaro-Stolz pentru şirurile $(\lg a_n)_n$ şi $b_n = n$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg a_1 + \lg a_2 + \dots + \lg a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lg a_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lg \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lg a_n,$$

de unde rezultă $\lg \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \right) = \lg \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)$ şi de aici cerința problemei.

Criteriul raportului

Dacă şirul $(a_n)_n$ are termenii pozitivi, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, dacă ultima limită există.

Criteriul majorării

Dacă $|a_n - a| \leq b_n$ şi $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

O reciprocă a teoremei Cesaro-Stolz

Dacă $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sunt două şiruri de numere reale cu proprietățile:

$$1) b_n \in \mathbb{R}^*, b_n \neq b_{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N};$$

$$2) (\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R};$$

$$3) (\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\text{Atunci } (\exists) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell.$$

Criteriul general de convergență al lui Cauchy. Condiția necesară şi suficientă ca un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ să fie convergent este ca pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru $(\forall) n \geq n(\varepsilon)$ şi pentru $(\forall) p \in \mathbb{N}^*$ să se verifice $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

2. Șiruri în $\mathbb{K}^k$

Fie $\mathbb{K}^k = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in \mathbb{K}, (\forall) i = \overline{1, k} \right\}$. Elementele lui $\mathbb{K}^k$ se

numesc **puncte** sau **vectori**.

Observație. Pe mulțimea $\mathbb{K}^k$ se definesc operațiile de adunare și înmulțire cu numere reale prin:

- 1) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k), (\forall) x, y \in \mathbb{K}^k$;
 - 2) $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_k), (\forall) x \in \mathbb{K}^k, (\forall) \alpha \in \mathbb{K}$.
- $(\mathbb{K}^k, +, \cdot)$ are o structură de spațiu vectorial peste corpul K .

Definiția 1.3.1. Fie $X \subset \mathbb{K}^k$. O aplicație $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow K, (K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ se numește **produs scalar** pe mulțimea X , dacă:

- 1) $\langle x, x \rangle \geq 0, (\forall) x \in X, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^k$;
- 2) $\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \langle x, \lambda \cdot y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle, (\forall) x, y \in X, (\forall) \lambda \in K$;
- 3) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, (\forall) x_1, x_2, y \in X$;
- 4) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, (\forall) x, y \in X$, unde $\overline{\langle y, x \rangle}$ este conjugatul numărului

complex $\langle y, x \rangle$.

Pentru $K = \mathbb{R}$ condiția 4) din definiția produsului scalar devine $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, (\forall) x, y \in X$.

Observație. Pe spațiul vectorial $(\mathbb{K}^k, +, \cdot)$ se introduce produsul scalar de forma

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^k x_i \cdot y_i.$$

Definiția 1.3.2. Fie $X \subset \mathbb{K}^k$. O aplicație $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{K}_+$ se numește **normă** pe X , dacă:

- 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^k$;
- 2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, (\forall) x \in X, (\forall) \alpha \in K$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, (\forall) x, y \in X$.

Observație. Pe $(\mathbb{K}^k, +, \cdot)$ se introduce norma $\| \cdot \|_2 : X \rightarrow \mathbb{K}_+$ definită cu ajutorul produsului scalar prin $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}, (\forall) x \in \mathbb{K}^k$.

$$\text{Rezultă că } \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}.$$

Definiția 1.3.3. Fie $a \in \mathbb{R}^k$ și $r \in \mathbb{R}_+$. Mulțimea punctelor $x \in \mathbb{R}^k$ pentru care $\|x - a\|_2 < r$ se numește **sfera deschisă** cu centrul în a și de rază r .

Definiția 1.3.4. Fie $a \in \mathbb{R}^k$ și $r \in \mathbb{R}_+$. Mulțimea punctelor $x \in \mathbb{R}^k$ pentru care $\|x - a\|_2 \leq r$ se numește **sfera închisă** cu centrul în a și de rază r .

Observație. În cazul în care $a \in \mathbb{R}$ sfera deschisă devine mulțimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care $|x - a| < r \Leftrightarrow x \in (a - r, a + r)$.

Notăție. Vom nota cu $B_r(a)$ sfera cu centrul în a și raza r .

Definiția 1.3.5. Mulțimea $A \subset \mathbb{R}^k$ se numește **deschisă**, dacă pentru $(\forall) a \in A$ există o sferă deschisă $B_r(a) \subset A$.

Exemplu

Intervalele $I_k = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid a_i < x_i < b_i, i = \overline{1, k} \right\}$ sunt mulțimi deschise în $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2)$.

Definiția 1.3.6. Fie $a \in \mathbb{R}^k$. O mulțime $V \subset \mathbb{R}^k$ se numește **vecinătate** a punctului a , dacă există o mulțime deschisă inclusă în V și care-l conține pe a .

Notăție. Vom nota cu $V(a)$ mulțimea tuturor vecinătăților lui a .

Definiția 1.3.7. Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct a se numește **punct de acumulare** pentru A , dacă $(\forall) V \in V(a)$ verifică $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.

Definiția 1.3.8. Se numește **șir** în $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, o aplicație $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$, definită prin $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, unde $a_n = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}) \in \mathbb{R}^k$.

Notăție: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemplu

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = \left(\sin \frac{n\pi}{2}, \frac{(-1)^n}{n} \right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ este din $\mathbb{R}^2$.

Definiția 1.3.9. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este **convergent**, dacă există $a_0 \in \mathbb{R}^k$, astfel încât $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n(\varepsilon)$ pentru care $\|a_n - a_0\|_2 < \varepsilon$, $(\forall) n > n(\varepsilon)$.

Observație. Pentru $a_n, a_0 \in \mathbb{R}^k$ avem:

$$|a_{n_i} - a_{0_i}| < \sqrt{\sum_{i=1}^k (a_{n_i} - a_{0_i})^2} = \|a_n - a_0\|_2 < \sum_{i=1}^k |a_{n_i} - a_{0_i}|.$$

Din aceste inegalități rezultă că un șir din $\mathbb{R}^k$ este convergent dacă și numai dacă șirurile componente $(a_{n_i})_{n \in \mathbb{N}}$, $i = 1, 2, \dots, k$, sunt convergente în $\mathbb{R}$.

Definiția 1.3.10. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ se numește **șir Cauchy** dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n(\varepsilon)$, astfel încât pentru $(\forall) n > n(\varepsilon)$ și pentru $(\forall) p \in \mathbb{N}^*$ să avem $\|a_{n+p} - a_n\|_2 < \varepsilon$.

Teorema 1.3.11. Condiția necesară și suficientă ca un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ să fie convergent este ca el să fie șir Cauchy în $\mathbb{R}^k$.

3. Probleme rezolvate

1.4.1 Să se determine punctele limită pentru următoarele șiruri:

a) $u_n = a^{(-1)^{n+1}} + \frac{1}{n}$; **b)** $u_n = \left(1 + \frac{\cos n\pi}{n}\right)^n$; **c)** $u_n = \sin \frac{n\pi}{4}$;

d) $u_n = (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n}$; **e)** $u_n = (1 + \cos n\pi) \cdot \frac{n}{n+1}$.

Indicație de rezolvare:

a) pentru n număr par, $u_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{a}$; pentru n număr impar $u_n = a + \frac{1}{n} \rightarrow a$;

deci, punctele limită sunt a și $\frac{1}{a}$;

b) e și $\frac{1}{e}$;

c) $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$;

d) $-1, 1$;

e) pentru $n = 2k$ avem $u_{2k} = 2 \cdot \frac{2k}{2k+1}$, deci $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k} = 2$. Pentru $n = 2k+1$ avem $u_{2k+1} = 0$, deci $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} = 0$. Se obțin punctele limită 2 și 0.

1.4.2 Să se determine limitele inferioară și superioară pentru următoarele șiruri:

a) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$;

b) $a_n = \frac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \sin^2 n \frac{\pi}{4}$;

c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos n \frac{\pi}{2}$.

Indicație de rezolvare:

a) se determină punctele limită ale șirului; pentru n număr par $a_n = 1 + \frac{n}{2n+2} \rightarrow \frac{3}{2}$, iar pentru n număr impar $a_n = -\frac{n}{2n+1} \rightarrow -\frac{1}{2}$; deci, mulțimea

punctelor limită este $L = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$, de unde rezultă că $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$ și $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{2}$;

b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ și $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$;

c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2} \cdot e + 1$ și $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{e}{2}$.

1.4.3 Folosind teorema lui Weierstrass să se studieze convergența următoarelor șiruri:

a) $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$; **b)** $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, $a > 0$, $a_0 = 0$;

c) $a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}} \right)$, $a > 0$, $a_0 > 0$; **d)** $a_n = \frac{a}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2}$, $a_0 = 0$, $0 < a < 1$;

e) $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, $0 < a_0 < 1$; **f)** $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}}$, $a_0 = 1$;

g) $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \frac{a_{n-1} + 2 \cdot b_{n-1}}{3}$, $0 < a_0 < b_0$.

Indicație de rezolvare:

a) șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este cu termeni pozitivi, iar raportul

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \frac{1}{n+1} \cdot e < 1, (\forall) n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde rezultă că șirul este monoton descrescător. Cum toți termenii sunt pozitivi, șirul va fi mărginit inferior de 0, deci este convergent.

Pentru calculul limitei, dacă $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, introducând limita în relația de recurență

a) $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, se va obține $\ell = \ell \cdot 0 \cdot e$, de unde $\ell = 0$;

b) șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de numere pozitive și monoton crescător, demonstrație ce se poate realiza prin inducție matematică după n . Presupunând că ar exista $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$,

aceasta va trebui să verifice relația de recurență, adică $\ell = \sqrt{a + \ell}$, de unde $\ell^2 - \ell - a = 0$

și se obțin $\ell_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$, $\ell_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$. Cum $\ell_2 < 0$ nu convine, termenii șirului

fiind pozitivi, rezultă ca limită posibilă ℓ_1 . Cum şirul este crescător, adică $a_{n-1} < a_n$ şi $a_1 = \sqrt{a} < a_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, rezultă $\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$, $\frac{a_1}{a_n} = \frac{\sqrt{a}}{a_n} < 1$, de unde $\frac{a}{a_n} < \sqrt{a}$.

Din relaţia de recurenţă ridicată la pătrat se va obţine $a_n^2 = a + a_{n-1}$, adică $a_n = \frac{a}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \sqrt{a} + 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, adică şirul este mărginit superior, deci este convergent, iar ℓ_1 este limita sa;

c) convergent;

d) convergent;

e) convergent;

f) cum $a_0 > 0$ rezultă că $a_n > 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ şi $a_n = 1 + \frac{2}{a_{n-1}} < 1 + 2 = 3$, deci şirul este mărginit.

Pentru studiul monotoniei, se consideră

$$a_{n+2} - a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n-1}} \right) = \frac{4}{a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \cdot a_{n+1}} \cdot (a_n - a_{n-2}),$$

deci $(a_{n+2} - a_n)$ are acelaşi semn cu $(a_n - a_{n-2})$.

Deoarece $a_2 - a_0 > 0$, rezultă că subşirul $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ este monoton crescător. Similar, deoarece $a_3 - a_1 < 0$, subşirul $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ este descrescător.

Cum ambele subşiruri sunt şi mărginite rezultă că există limitele lor, de forma $\ell_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$, $\ell_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$.

În acelaşi timp $a_{2k+1} = 1 + \frac{2}{a_{2k}}$, $a_{2k+2} = 1 + \frac{2}{a_{2k+1}}$. Trecând la limită în cele două relaţii de recurenţă, obţinem $\ell_2 = 1 + \frac{2}{\ell_1}$, $\ell_1 = 1 + \frac{2}{\ell_2}$, echivalent cu $(\ell_2 - \ell_1) \cdot (\ell_1 \cdot \ell_2 - 2) = 0$. Dacă $\ell_1 \neq \ell_2$, rezultă că $\ell_1 \cdot \ell_2 = 2$, adică $\ell_1 = 0$, ceea ce este fals. Rezultă $\ell_1 = \ell_2$, deci şirul este convergent;

g) $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} > a_0$, $b_1 = \frac{a_0 + 2 \cdot b_0}{3} < b_0$, $a_1 < b_1$. În continuare se

demonstrează prin inducţie matematică $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, deci putem scrie $a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots < b_n < b_{n-1} < \dots < b_1 < b_0$. Rezultă că există $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ şi $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ şi trecând la limită în relaţiile de recurenţă, obţinem $\ell_1 = \ell_2$.

1.4.4 Folosind teorema Cesaro-Stolz, să se calculeze următoarele limite:

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}; \text{ b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, p+1 > 0; \text{ c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}; \\ \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n}; \text{ e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}; \\ \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n\sqrt{n}}; \text{ g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a+b}{c+d} + \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} + \dots + \frac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d} \right). \end{aligned}$$

Indicație de rezolvare:

a) Cu notațiile din teorema Cesaro-Stolz se consideră $a_n = n$, $b_n = 2^n$, de unde rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

$$\text{b)} \frac{1}{p+1};$$

$$\text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0;$$

$$\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} = 1;$$

$$\text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2;$$

$$\text{f)} 0;$$

$$\text{g)} \frac{a}{c}.$$

1.4.5 Să se calculeze limitele următoare:

$$\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}; \text{ b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n}; \text{ c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty;$$

$$\text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1;$$

$$\text{c)} \frac{1}{e};$$

1.4.7 Utilizând criteriul general de convergență al lui Cauchy, să se demonstreze convergența șirurilor:

$$\text{a)} \quad u_n = \frac{\sin a_1}{2} + \frac{\sin a_2}{2^2} + \dots + \frac{\sin a_n}{2^n};$$

$$\text{b)} \quad u_n = \frac{\cos a_1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos a_2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos a_n}{n(n+1)};$$

$$\text{c)} \quad u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n};$$

$$\text{d)} \quad u_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{[1+3(n-1)] \cdot (1+3n)};$$

$$\text{e)} \quad u_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+4)};$$

$$\text{f)} \quad u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)};$$

$$\text{g)} \quad u_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{3^n};$$

$$\text{h)} \quad u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Indicație de rezolvare:

a) fiind dat $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat, se va căuta un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru $(\forall) n \geq n(\varepsilon)$ și pentru $(\forall) p \in \mathbb{N}^*$ să se verifice $|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

$$|u_{n+p} - u_n| = \left| \frac{\sin a_{n+1}}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin a_{n+p}}{2^{n+p}} \right| < \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) < \frac{1}{2^n}$$

și cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ se poate găsi un rang, de exemplu $n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rceil + 1$, pentru care

$|u_{n+p} - u_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $(\forall) n \geq n(\varepsilon)$, $(\forall) p \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este convergent;

$$\text{c)} \quad |u_{n+p} - u_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{n+p} \right|; \text{ dacă } p \text{ este număr par,}$$

atunci

$$\begin{aligned}
|u_{n+p} - u_n| &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right| = \\
&= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) < \\
&< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+4} - \dots - \frac{1}{n+p-2} + \frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p} = \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Dacă p este impar, atunci

$$\begin{aligned}
|u_{n+p} - u_n| &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \dots + \frac{1}{n+p} < \\
&< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p-1} = \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, se poate găsi un rang $n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$, pentru care

$|u_{n+p} - u_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$, $(\forall) n \geq n(\varepsilon)$, $(\forall) p \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este convergent;

$$\textbf{d)} \quad u_n = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{1+3(n-1)} - \frac{1}{1+3n} \right] = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{1+3n} \right), \quad \text{de}$$

unde $|u_{n+p} - u_n| = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+3n} - \frac{1}{1+3n+3p} \right) < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+3n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$;

e)

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4} \right] = \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right).
\end{aligned}$$

Rezultă $|u_{n+p} - u_n| < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, deci șirul este

convergent.

1.4.12 Să se arate că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $B_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{2n}$ cu

$b_n > 0$ are limita egală cu b , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} \cdot b_{n+1} + a_{n+2} \cdot b_{n+2} + \dots + a_{2n} \cdot b_{2n}) = a \cdot b.$$

Indicație de rezolvare:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N},$$

astfel încât pentru $(\forall) n \geq n_1(\varepsilon)$ să rezulte $|a_n - a| < \varepsilon$.

De asemenea, din $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = b$ rezultă că $|B_n - b| < \varepsilon, (\forall) n \geq n_2(\varepsilon)$.

Cum șirurile $(a_n)_n$ și $(B_n)_n$ sunt convergente, ele sunt mărginite, adică $(\exists) M_1 \geq 0$, astfel încât $|a_n| \leq M_1, (\forall) n \geq n_3$ și $(\exists) M_2 \geq 0$, astfel încât $|B_n| \leq M_2, (\forall) n \geq n_4$.

Se notează $a_n - a = \alpha_n$ și $B_n - b = \beta_n$ și se consideră

$$n(\varepsilon) = \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon), n_3, n_4).$$

Atunci

$$\begin{aligned} |a_{n+1} \cdot b_{n+1} + \dots + a_{2n} \cdot b_{2n} - a \cdot b| &= |(\alpha_{n+1} + a) \cdot b_{n+1} + \dots + (\alpha_{2n} + a) \cdot b_{2n} - a \cdot b| = \\ &= |(\alpha_{n+1} \cdot b_{n+1} + \dots + \alpha_{2n} \cdot b_{2n}) + a \cdot B_n - a \cdot b| \leq \\ &\leq |\alpha_{n+1}| \cdot |b_{n+1}| + \dots + |\alpha_{2n}| \cdot |b_{2n}| + |a| \cdot |B_n - b| < \varepsilon \cdot (M + |a|), \end{aligned}$$

unde $M = \max(M_1, M_2)$.

Rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} \cdot b_{n+1} + a_{n+2} \cdot b_{n+2} + \dots + a_{2n} \cdot b_{2n}) = a \cdot b.$$

4. TEST DE AUTOEVALUARE

1 Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze divergența șirurilor:

a) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$;

b) $u_n = \sin n$; c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2 Să se studieze convergența șirurilor:

a) $x_{n+1} = \frac{2 \cdot a \cdot x_n}{a + x_n}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, cu $x_0 > 0$;

b) $x_{n+1} = x_n^2 - 2 \cdot x_n + 2$, $n \geq 1$, $x_1 \in [1, 2]$;

c) $x_{n+1}^2 = 3 \cdot x_n - 2$, $n \geq 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$;

d) $x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 0$, $x_0 = 3$.

3 Să se arate că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

este convergent și să se calculeze limita sa.

4 Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este convergent

și să se deducă inegalitatea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$.

5 Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (2n)}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2) \dots (a+n)}{n!}}$, $a > -1$.

LECȚIA 2 - SERII DE NUMERE REALE ȘI COMPLEXE. CRITERII DE CONVERGENȚĂ. PROPRIETĂȚI

1. Serii de numere reale

Definiția 1.5.1. Fie $(a_n)_n$ un șir de numere reale și $(s_n)_n$ un șir definit prin: $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Se numește serie de numere reale asociată șirului $(a_n)_n$, simbolul $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, iar $(s_n)_n$ se numește șirul sumelor sale parțiale.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de numere reale se numește **convergentă** și are suma s , dacă și numai

dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_n$ este convergent și are limita s ; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Seria

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de numere reale se numește **divergentă**, dacă șirul sumelor parțiale este divergent.

Criteriul general de convergență al lui Cauchy

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon, (\forall) n \geq n(\varepsilon), (\forall) p \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $p = 1$ se obține:

Criteriu necesar de convergență. Condiția necesară, dar nu și suficientă, ca o serie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să fie convergentă este ca $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, cu toate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

Criteriul I al comparației

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel ca $a_n \leq b_n$, $(\forall) n \geq n_0$.

Atunci:

a) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă;

b) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul II al comparației

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $(\forall) n \geq n_0$.

Atunci:

a) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă;

b) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul la limită

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$.

Atunci:

a) dacă $0 < K < +\infty$, cele două serii au aceeași natură;

b) dacă $K = 0$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă;

c) dacă $K = +\infty$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N și un număr $q \in (0,1)$, astfel încât pentru $(\forall) n > N$ să avem $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, seria este convergentă, iar dacă $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $(\forall) n > N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. Atunci:

- a) dacă $\lambda < 1$, seria este convergentă;
- b) dacă $\lambda > 1$, seria este divergentă;
- c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Criteriul raportului (al lui d'Alembert)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N și un număr $q \in (0,1)$, astfel încât pentru $(\forall) n > N$ să avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, seria este convergentă, iar dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, $(\forall) n > N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. Atunci:

- a) dacă $\lambda < 1$, seria este convergentă;
- b) dacă $\lambda > 1$, seria este divergentă;
- c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Exemple

1) Se consideră seria $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$. Să se arate că ea este convergentă și că $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, iar $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Indicație de rezolvare:

Seria are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$.

Cum $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, din criteriul I de comparație rezultă convergența seriei.

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{pentru } n \text{ par} \\ \frac{1}{2^n} & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} & \text{pentru } n \text{ par} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty > 1, \text{ iar } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1.$$

2) Să se arate că seria $\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2^2} + 2^2 + \dots + \frac{1}{2^n} + 2^n + \dots$ este divergentă și

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \text{ iar } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Indicație de rezolvare:

Seria are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + 2^n \right)$, care este divergentă, deoarece

$$\frac{1}{2^n} + 2^n > 2^n, (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

$$u_n = \begin{cases} 2^n & \text{pentru } n \text{ par} \\ \frac{1}{2^n} & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{2^{2n+1}} & \text{pentru } n \text{ par} \\ 2^{2n+1} & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\text{Rezultă că } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty > 1, \text{ iar } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1.$$

Observație. Criteriul raportului dă numai condiții suficiente de convergență și divergență, așa după cum rezultă din exemplele anterioare.

Criteriul logaritm

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N și un număr

$q > 1$, astfel încât pentru $(\forall) n > N$ să avem $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq q > 1$, seria este convergentă, iar

dacă $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$, $(\forall) n > N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lambda$. Atunci:

- a) pentru $\lambda > 1$, seria este convergentă;
- b) pentru $\lambda < 1$, seria este divergentă;
- c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Criteriul lui Kummer

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un șir de numere $(c_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ și un număr natural N și un număr $\lambda > 0$, astfel încât $\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right) \geq \lambda > 0, (\forall) n > N$, seria este convergentă.

Dacă $\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right) \leq 0, (\forall) n > N$, și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Corolar

Fie șirul $(c_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$, astfel încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ este divergentă. Atunci seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este:

- a) convergentă, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right) > 0$;
- b) divergentă, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right) \leq 0$.

Exemplu

Se consideră seria $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a^n, a > 0$. În acest caz, $c_n = n$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ este divergentă;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1-a) - 2an - a}{a(n+1)} = \begin{cases} \infty, & a < 1; \\ -\infty, & a > 1; \\ -2, & a = 1, \end{cases}$$

de unde rezultă că seria este convergentă pentru $a \in (0,1)$.

Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N și un număr

$\lambda > 1$, astfel încât pentru $(\forall) n > N$ să avem $n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \lambda > 1$, seria este

convergentă, iar dacă $n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, (\forall) n > N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi și $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda$. Atunci:

- a) pentru $\lambda > 1$, seria este convergentă;
- b) pentru $\lambda < 1$, seria este divergentă;
- c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Criteriul de condensare al lui Cauchy

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi și descrescători, iar $(a_n)_n$ un șir divergent de

numere naturale, astfel încât șirul cu termenul general $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}$ să fie mărginit. Atunci

seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \cdot u_{a_n}$ au aceeași natură.

Observație. Șirul $(a_n)_n$ se alege cel mai frecvent ca fiind $a_n = 2^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, care satisface condițiile criteriului de condensare.

3. Serii cu termeni oarecare. Serii absolut convergente, serii alternate, serii semiconvergente

Definiția 1.7.1. O serie cu termenii oarecare $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se numește **absolut convergentă**,

dacă seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este convergentă.

Definiția 1.7.2. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, dar seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este divergentă, seria se numește **semiconvergentă**.

Teorema 1.7.3. O serie cu termeni oarecare absolut convergentă este convergentă.

Observație. Reciproca teoremei nu este adevărată, deoarece există serii convergente, dar care nu sunt absolut convergente.

Exemplu: Seria lui Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^\alpha}$, pentru $\alpha > 1$ este absolut convergentă, iar pentru $\alpha \leq 1$ este semiconvergentă.

Observație. Seriile cu termeni pozitivi sunt absolut convergente. Criteriile de convergență stabilite la seriile cu termeni pozitivi sunt valabile și pentru seriile absolut convergente.

Teorema 1.7.4. Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor în mod arbitrar, obținem o nouă serie absolut convergentă cu aceeași sumă.

Observație. Teorema este valabilă și pentru seriile cu termeni pozitivi care sunt absolut convergente.

Teorema lui Riemann. Într-o serie de numere reale, semiconvergentă, se poate schimba ordinea factorilor, astfel încât seria obținută să aibă ca sumă un număr dat.

Exemplu

Fie seria semiconvergentă $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \dots$

Se pot schimba termenii în ordinea

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \dots,$$

iar noua serie are suma $\frac{1}{2} \cdot S$.

4. Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

Criteriul lui Dirichlet

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot v_n$, unde șirul $(u_n)_n$ este monoton și mărginit, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Criteriul lui Abel

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot v_n$, unde $(u_n)_n$ este un șir de numere pozitive descrescătoare și convergent la zero, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ are șirul sumelor parțiale mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Exemplu

Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă pentru $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Indicație de rezolvare:

Șirul cu termenul general $u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}$ este monoton descrescător și convergent la zero (utilizând teorema Cesaro-Stolz), iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ are șirul sumelor

parțiale mărginit, deoarece $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot x}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}$, de unde

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Definiția 1.7.5. Se numește *serie alternată* o serie de forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n$, unde $u_k \geq 0, (\forall) k \in \mathbb{N}^*$.

Criteriul lui Leibniz

Dacă într-o serie alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n$ șirul $(u_n)_n$ este monoton descrescător și are limita zero, atunci seria este convergentă.

5. Operații cu serii numerice

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii. Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ și $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, unde $c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n \cdot b_1$ se numesc, respectiv, *suma*, *diferența* și *produsul seriilor* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente și au sumele A și B , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ este convergentă și are suma $A \pm B$.

Teorema lui Abel

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ și seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sunt convergente și dacă A, B, C sunt, respectiv, sumele lor, atunci $A \cdot B = C$.

Teorema lui Mertens

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente și cel puțin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă și $A \cdot B = C$.

Teorema lui Cauchy

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă.

6. Serii în $\mathbb{C}^k$. Serii de numere complexe

Fie şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{C}^k$ şi

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

...

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

...

Şirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numeşte **şirul sumelor parţiale** pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definiţia 1.9.1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este **convergentă**, dacă şirul sumelor parţiale este convergent.

Suma seriei este limita şirului sumelor parţiale.

Criteriul general al lui Cauchy

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de elemente din $\mathbb{C}^k$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru

$$(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n(\varepsilon), \text{ astfel încât } \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right\|_2 < \varepsilon, (\forall) n > n(\varepsilon) \text{ şi } (\forall) p \in \mathbb{N}^*.$$

Consecinţă. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de elemente din $\mathbb{C}^k$ este convergentă, atunci

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_2 = 0$, iar aceasta reprezintă o condiţie necesară, dar nu suficientă de convergenţă a unei serii.

Definiţia 1.9.2. Se numeşte **şirul sumelor parţiale** pentru seria de numere complexe

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, şirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin:

$$s_1 = z_1; \quad s_2 = z_1 + z_2$$

.....

$$s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

.....

Definiția 1.9.3. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ de numere complexe este *convergentă*, dacă șirul sumelor parțiale este convergent.

Teorema 1.9.4. Seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, unde $z_n = a_n + i \cdot b_n$, pentru $(\forall) n \in \mathbb{N}$, este convergentă dacă și numai dacă seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă și are suma $s = a + i \cdot b$, atunci $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Criteriul lui Cauchy

Seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă dacă și numai dacă $(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n(\varepsilon)$, astfel încât $|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon, (\forall) n > n(\varepsilon)$ și $(\forall) p \in \mathbb{N}^*$.

Definiția 1.9.5. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ o serie de numere complexe. Dacă seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ este convergentă, spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este *absolut convergentă*.

Teorema 1.9.6. O serie de numere complexe absolut convergentă este convergentă.

Definiția 1.9.7. Seriile de numere complexe convergente, pentru care seria modulelor nu este convergentă se numesc serii de numere complexe *semiconvergente*.

Teorema 1.9.8. Seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, unde $z_n = a_n + i \cdot b_n$ este absolut convergentă dacă și numai dacă seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt absolut convergente.

7. Probleme rezolvate

1.10.1 Să se arate că următoarele serii sunt convergente și să se determine sumele lor:

a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3^n} + \dots$; b) $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \dots + \frac{n}{a^n} + \dots, |a| > 1$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a+1} - 2 \cdot \sqrt{n+a} + \sqrt{n+a-1}), a > 0$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n) \cdot (a+n+1)}, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$; e) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2 - 1}}$.

Indicație de rezolvare:

a) Șirul sumelor parțiale are termenul general

$$s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{4},$$

deci seria este convergentă și are suma $s = \frac{1}{4}$;

b) $s_n = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \dots + \frac{n}{a^n}$. Pentru calculul limitei șirului sumelor parțiale se

consideră funcția $f(x) = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{a}\right)^n, x \in \mathbb{R}$. Atunci $s_n = f'(1)$.

În același timp,

$$f(x) = \frac{x}{a} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{x^{n+1} - a^n \cdot x}{x - a} \cdot \frac{1}{a^n} \Rightarrow s_n = \frac{n - (n+1)a + a^{n+1}}{(1-a)^2 \cdot a^n}.$$

Deoarece $|a| > 1$, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{(1-a)^2}$ și astfel seria este convergentă și are

suma $s = \frac{a}{(1-a)^2}$;

c) $s = \sqrt{a} - \sqrt{a+1}$;

$$\text{d)} \quad a_n = \frac{1}{a+n} - \frac{1}{a+n+1} \Rightarrow s_n = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{a+1}, \text{ deci}$$

seria este convergentă și are suma $s = \frac{1}{a+1}$;

$$\text{e)} \quad s = \ln \frac{1}{2};$$

$$\text{f)} \quad s = 1.$$

1.10.2 Să se însumeze seriile următoare date prin termenii generali:

$$\text{a)} \quad u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1); \text{ b)} \quad u_n = \frac{1}{n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)}, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\text{c)} \quad u_n = \frac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9}; \text{ d)} \quad u_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot (x+n)};$$

$$\text{e)} \quad u_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1}; \text{ f)} \quad u_n = \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2};$$

$$\text{g)} \quad u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n \cdot \ln(n+1)}, \quad n > 1; \text{ h)} \quad u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{n!}.$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{a)} \quad s_n = \varphi(n) - \varphi(0), \text{ deci pentru } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \ell \Rightarrow s = \ell - \varphi(0);$$

$$\text{b)} \quad u_n = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)} - \frac{1}{(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)} \right] \Rightarrow s = \frac{1}{k \cdot k!};$$

$$\text{c)} \quad n^4 + 2n^2 + 9 = \left[(n-1)^2 + 2 \right] \cdot \left[(n+1)^2 + 2 \right];$$

rezultă

$$u_n = \frac{an+b}{(n-1)^2+2} + \frac{cn+d}{(n+1)^2+2} = \frac{1}{(n-1)^2+2} - \frac{1}{(n+1)^2+2} \Rightarrow s = \frac{5}{6};$$

$$\text{d)} \quad s = \frac{1}{x-1};$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} &= \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1 + \frac{1}{n(n+1)}} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$s_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} \Rightarrow s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{f)} \quad u_n = \operatorname{arctg} \frac{2}{(n^2 - 1) + 1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} \Rightarrow s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{g)} \quad u_n = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow s_n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{\ln 2};$$

$$\text{h)} \quad s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 27 \cdot e.$$

1.10.3 Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze convergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \geq 2.$$

Indicație de rezolvare:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| &= \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{(n+p)^{\alpha}} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

deci seria este convergentă.

1.10.4 Utilizând criterii de comparație, să se stabilească natura următoarelor serii:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}; \text{ b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \text{ c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}; \text{ d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n};$$

$$\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}; \text{ f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + a + \dots + a^n)}, a \geq 0;$$

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + n}, a \geq -1; \text{ h)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right);$$

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{a}{3^n}, 0 \leq a \leq 3\pi.$$

Indicație de rezolvare:

a) se consideră $u_n = \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}$ și $v_n = \frac{1}{n^2}$; cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{7} \in (0, \infty)$,

rezultă că cele două serii au aceeași natură și cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, și seria

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă;

b) $u_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n^2} = v_n$,

iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, deci și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă;

c) divergentă;

d) convergentă;

e) $u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} \geq \frac{1}{n} = v_n$ și cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă rezultă că și

seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă;

f) pentru $a = 1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ care este convergentă; pentru

$a > 1 \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{a^n} = v_n$ și cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă; pentru

$$a \in (0, 1) \Rightarrow u_n = \frac{1}{n \left(\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right)} = \frac{1 - a}{n(1 - a^{n+1})} \geq \frac{1 - a}{n} = v_n$$

și cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă, rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă; pentru $a = 0$,

seria este divergentă, ea fiind $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

g) $u_n = \frac{1}{a^n + n} \leq \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = v_n \Rightarrow$ pentru $a > 1$ seria este convergentă;

pentru $a \in (-1, 1)$ se compară cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n + n} = 1 \in (0, \infty)$ rezultă că

seria va fi divergentă; pentru $a = 1$, seria este divergentă, ea fiind $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$;

h) divergentă;

i) convergentă.

1.10.5 Să se stabilească natura următoarelor serii de numere pozitive:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot a^n, a > 0$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}, a \geq 0$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, a \geq 0$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+a)} - n\right)^n, a > 0$; **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(a + \frac{\alpha}{n}\right), a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; **h)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n, a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}, a > 0, p \in \mathbb{R}$;

j) $a + \sum_{n=2}^{\infty} (2 - \sqrt[n]{e})(2 - \sqrt[n]{e}) \dots (2 - \sqrt[n]{e}) \cdot a^n, a > 0$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; **l)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3 + 1) \cdot a^n}{(n+1)!}, a \geq 0$;

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a \geq 0$; **n)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}, a \geq 0$; **o)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}, x > 0$;

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(an+1) - \ln n}}, a > 0$; **r)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$; **s)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$;

t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$; **u)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^\alpha}, a > 0, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$;

$$v) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a(a+r) \dots (a+nr-r)}{b(b+r) \dots (b+nr-r)} \right]^{\alpha}, \quad a, b, r > 0, \alpha \in \mathbb{R};$$

$$w) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Indicație de rezolvare:

a) convergentă;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = ae$, de unde rezultă că pentru $a < \frac{1}{e}$ seria este convergentă, iar

pentru $a > \frac{1}{e}$ seria este divergentă; pentru $a = \frac{1}{e}$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$;

c) convergentă;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a$, de unde rezultă că pentru $a < 1$ seria este convergentă, pentru $a > 1$ seria este divergentă, iar pentru $a = 1$ se obține seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ care este divergentă;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{a+1}{2}$, de unde rezultă că pentru $a < 1$ seria este convergentă, pentru $a > 1$ seria este divergentă, iar pentru $a = 1$, $u_n = 1$, deci seria este divergentă;

f) convergentă;

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \left(a + \frac{\alpha}{n}\right) = \operatorname{tg} a$, deci pentru $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ seria este convergentă, pentru $a \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ seria este divergentă, iar pentru $a = \frac{\pi}{4}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{2a} \neq 0$, deci seria este divergentă;

h) pentru $a < c$ seria este convergentă, pentru $a \geq c$ este divergentă;

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, deci pentru $a < 1$ seria este convergentă, pentru $a > 1$ seria este

divergentă, iar pentru $a = 1$ se obține seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, care este convergentă pentru $p > 1$ și divergentă pentru $p \leq 1$;

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$, deci pentru $a < 1$ seria este convergentă, pentru $a > 1$ seria este

divergentă, iar pentru $a = 1$ avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - e^{\frac{1}{n+1}}$; deoarece $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă că

$e^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$ și din criteriul III de comparație, seria este

divergentă;

k) convergentă;

l) convergentă;

m) convergentă;

n) convergentă;

o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = -\ln x$, de unde rezultă că pentru $x < \frac{1}{e}$ seria este convergentă, iar

pentru $x > \frac{1}{e}$ seria este divergentă; pentru $x = \frac{1}{e}$, se obține seria armonică divergentă;

p) pentru $a > e$ seria este convergentă, iar pentru $a < e$ seria este divergentă;

r) divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = 0$;

s) divergentă;

t) $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \cdot \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\frac{1}{n}}$;

se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$ și se determină limita acesteia în punctul $x = 0$, se va obține:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{e}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \frac{1}{e} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria este divergentă;

u) pentru $\alpha < a$ seria este divergentă, pentru $\alpha > a$ seria este convergentă;

v) pentru $r < \alpha(b-a)$ seria este convergentă, pentru $r > \alpha(b-a)$ seria este divergentă;

w) pentru $a < 2$ seria este divergentă, pentru $a > 2$ seria este convergentă.

Pentru $a = 2$, se utilizează inegalitatea $\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, de unde rezultă că

$$\left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^2 \geq \frac{1}{4n}, \text{ deci seria este divergentă.}$$

1.10.6 Să se studieze natura seriei armonice generalizate:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Indicație de rezolvare:

Pentru $\alpha \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \neq 0$, deci seria este divergentă.

Pentru $\alpha > 0 \Rightarrow a_n = n^{-\alpha} > 0$ este șir descrescător, deci seria armonică generalizată are aceeași natură cu seria $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot (2^k)^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k$, care este seria geometrică cu rația $2^{1-\alpha}$. Deci, pentru $2^{1-\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$ seria este divergentă, iar pentru $2^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$ seria este convergentă.

1.10.7 Să se stabilească natura seriilor alternate:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{10^{n-1} \cdot a + 10^{n-2} \cdot a + \dots + 10 \cdot a + a}{10^n}, a > 0;$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{3^n};$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$

Indicație de rezolvare:

a) șirul cu termenul general $u_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$ este un șir descrescător, deoarece

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right)^{n+2} < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = 0, \text{ deci conform criteriului}$$

lui Leibniz, seria este convergentă;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \cdot \frac{10^n - 1}{9 \cdot 10^n} = \frac{a}{9} \neq 0$, deci seria este divergentă;

c) convergentă;

d) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}$, șir descrescător și convergent la zero, deci seria este

convergentă.

1.10.8 Să se studieze convergența absolută și semiconvergența seriilor cu termenii oarecare:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}$, $x \in \mathbb{R}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(n+a)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$, $a \neq \pm 1$; **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a \in \mathbb{R}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+\sqrt{3})}$ unde $(a_n)_n$ este un șir mărginit;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^n \cdot \sin^{2n} x}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$; **i)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Indicație de rezolvare:

a) $|u_n| \leq \frac{1}{3^n}$ și utilizând criteriul I de comparație, seria este absolut convergentă;

b) divergentă;

c) absolut convergentă;

d) pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă, pentru $\alpha \leq 0$ seria este divergentă, deoarece nu se verifică condiția necesară de convergență a unei serii, iar pentru $\alpha \in (0, 1]$, seria este semiconvergentă, utilizând criteriul lui Leibniz;

e) pentru $|a| < 1$ seria este absolut convergentă, iar pentru $|a| > 1$ seria este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$;

f) pentru $a = \pm 1$ seria este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, iar pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ seria este absolut convergentă;

g) seria este absolut convergentă, deoarece $u_n = \frac{|a_n|}{n(n + \sqrt{3})} \leq \frac{M}{n^2}$;

h) se utilizează criteriul raportului pentru seria modulelor și obținem că pentru $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, seria este convergentă și pentru $x \in \left(k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, este divergentă; pentru $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ se obține seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$;

i) semiconvergentă;

j) pentru seria modulelor se aplică Raabe-Duhamel și obținem că pentru $a \geq 0$ seria este absolut convergentă, iar pentru $a < 0$ seria modulelor este divergentă.

Pentru $a < 0$ avem

$$\frac{a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!} = (-1)^n \cdot \frac{(-a)(1-a) \cdot \dots \cdot (n-a-1)}{n!} \stackrel{\text{not}}{=} (-1)^n \cdot b_n,$$

unde $b_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Am obținut seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$, pentru care

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n-a}{n+1} \geq 1$, pentru $a \leq -1$; deci, în acest caz șirul $(b_n)_n$ este crescător și limita este nenulă, deci seria este divergentă.

Pentru $a \in (-1, 0)$ șirul $(b_n)_n$ este descrescător și se demonstrează că are limita zero.

$$\text{Pentru aceasta, fie } b_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}, \quad b_{n-1} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}}{n-1}.$$

Rezultă că $u_n = n \cdot b_n - (n-1) \cdot b_{n-1}$ și înlocuind pe b_n și pe b_{n-1} vom obține $u_n = (-a) \cdot b_{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Cum șirul $(b_n)_n$ este descrescător și mărginit inferior, el este convergent, deci șirul $(u_n)_n$ este convergent.

Fie $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ și trecând la limită în cele două relații de recurență

obținute anterior, rezultă că $\ell = 0$. Utilizând criteriul Leibniz, seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$ este convergentă.

1.10.9 Să se arate că:

- a)** suma dintre o serie convergentă și una divergentă este o serie divergentă;
- b)** există serii divergente a căror sumă este o serie convergentă.

Indicație de rezolvare:

- a) fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o serie divergentă; dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ar fi convergentă, atunci diferența dintre aceasta și seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ar fi o serie convergentă, dar diferența este seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, care este o serie divergentă; rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este divergentă;
- b) seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ sunt divergente, dar suma lor este seria cu suma egală cu zero, deci este o serie convergentă.

1.10.10 Să se efectueze produsul seriilor absolut convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ și

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \text{ și să se deducă de aici suma seriei } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

Indicație de rezolvare:

Seria valorilor absolute este $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ pentru ambele serii. Pentru aceasta, șirul sumelor parțiale este $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ convergent către e , de unde rezultă că ambele serii sunt absolut convergente. Din Teorema lui Cauchy seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă și suma ei verifică $C = A \cdot B$.

$$\text{Dar } c_n = \frac{1}{n!} \cdot (1-1)^n = 0 \Rightarrow C = 0. \text{ Cum } A = e \Rightarrow B = 0.$$

$$\text{Deci, } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} = 0.$$

1.10.11 Se dau șirurile $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ definite prin formulele de recurență:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2 \cdot a_n \cdot b_n}{a_n + b_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_0 = a > b = b_0 > 0.$$

a) Să se demonstreze că cele două șiruri sunt convergente și că au aceeași limită ℓ .

b) Să se studieze natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (\ell - b_n)$.

Indicație de rezolvare:

a) se demonstrează că șirul $(a_n)_n$ este monoton descrescător de termeni pozitivi, iar $(b_n)_n$ este monoton crescător, prin inducție matematică; notând $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ și trecând la limită în relațiile de recurență, rezultă că $\ell_1 = \ell_2 = \ell$;

b) seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} (\ell - b_n)$ este cu termenii pozitivi și aplicându-se criteriul raportului, rezultă că este convergentă.

1.10.12 Să se studieze natura seriilor complexe:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta}{n^2}$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta p + i \cdot \sin n\theta p}{n}$, $\theta \neq \frac{2k\pi}{p}$, $k = 0, 1, \dots, p-1$.

Indicație de rezolvare:

a) seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2}$ sunt absolut convergente, de unde rezultă și convergența seriei complexe;

b) pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta p}{n}$ se aplică criteriul Dirichlet, considerându-se șirul

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}^*$ descrescător la zero și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta p$ având șirul sumelor parțiale mărginit.

Rezultă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta p}{n}$ convergentă. Similar se arată convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta p}{n}$, deci seria de numere complexe va fi convergentă.

8. TEST DE AUTOEVALUARE

1 Să se stabilească natura seriilor cu termenii oarecare:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos n^2}{n};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, x \in \mathbb{R};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin nx}{n};$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln(2 + e^{3n})}{\ln(3 + e^{2n})};$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n};$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right);$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha + \frac{1}{n}}}, \alpha \in \mathbb{R}.$

2 Să se demonstreze că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă, pentru orice

x real. Dacă $s(x)$ este suma seriei, să se stabilească relația $s(x+y) = s(x) \cdot s(y), (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$

9. TEMĂ DE CONTROL

1 Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent.

2 Să se studieze convergența șirurilor definite prin:

a) $x_n > 0, x_{n+1} \leq \frac{x_n}{1+x_n}, (\forall) n \geq 0, x_0 = 1;$

b) $x_n + x_{n+1} > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}, x_{n+1}^2 < x_n^2, (\forall) n \in \mathbb{N};$

c) $0 < x_n < 2, (2 - x_n) \cdot x_{n+1} > 1, (\forall) n \in \mathbb{N}.$

3 Să se arate că șirul definit prin termenul general $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ este convergent și să i se calculeze limita.

4 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{n+1} + \dots + \sin \frac{\pi}{2n} \right).$

5 Să se calculeze limitele șirurilor următoare din $\mathbb{R}^2$:

a) $\left(\sqrt[n]{\ln n}, \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}};$

b) $\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}, \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$

6 Să se demonstreze convergența șirului cu termenul general:

$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}, n \geq 1$ și să se arate că limita sa aparține intervalului $(-2, -1).$

7 Știind că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot (n+1)^2}.$

8 Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$, știind că $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

9 Fie șirul definit prin $\begin{cases} a_1 = \sqrt{\alpha} \\ a_n = \sqrt{\alpha + a_{n-1}}, \alpha > 0, n \geq 2 \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_n$ este convergent și să se calculeze $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

b) Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (\ell - a_n)$.

10 a) Să se studieze convergența șirului $(x_n)_n$ cu $x_0 > 0$ și definit prin $x_{n+1} = \frac{2 \cdot a \cdot x_n}{a + x_n}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

b) Să se studieze convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - a)$.

11 Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n}, \frac{1}{n} \right)$ din $\mathbb{R}^2$.

12 Să se calculeze sumele următoarelor serii de numere complexe:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)} + i \cdot \frac{1}{n(n+1)} \right)$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3^n} + i \cdot \frac{n \cdot 2^n}{(n+2)!} \right)$.

LECȚIA 3 - ȘIRURI DE FUNCȚII. SERII DE FUNCȚII

1. Șiruri de funcții

Fie familia de funcții $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ definite pe aceeași mulțime X și cu valori reale. Dacă mulțimea indicilor I este mulțimea numerelor naturale, atunci avem un șir de funcții.

Notăție: $(f_n)_n$. Un șir de funcții este echivalent cu o familie de șiruri de numere.

Definiția 2.1.1. Un punct $a \in X$ este *punct de convergență al șirului de funcții* $(f_n)_n$ dacă șirul numeric $(f_n(a))_n$ este convergent.

Mulțimea punctelor de convergență ale șirului de funcții $(f_n)_n$ se numește **mulțimea de convergență** a șirului $(f_n)_n$.

Exemple

1) Șirul de funcții $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, are mulțimea de convergență intervalul $[-1, 1]$.

2) Șirul de funcții $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, are mulțimea de convergență $\mathbb{R}$.

Definiția 2.1.2. Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții definite pe mulțimea X și având mulțimea de convergență A . Dacă $f(x)$ este limita șirului numeric $(f_n(x))_n$, $(\forall) x \in A$, atunci s-a stabilit o corespondență $x \rightarrow f(x)$ a mulțimii A în mulțimea numerelor reale. Funcția $f(x)$ definită prin $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in A$, se numește **funcția limită** pe mulțimea A a șirului de funcții considerat.

Exemple

1) Șirul de funcții $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ are mulțimea de convergență $\mathbb{R}$ și pentru orice x real $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

2) Șirul de funcții $f_n(x) = a^{\frac{nx+1}{n+2}}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, este convergent pentru orice x real și are funcția limită $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Definiția 2.1.3. Se spune că șirul de funcții $(f_n)_n$ este **simplu convergent** pe X către funcția f , dacă pentru $(\forall) x \in X$ și pentru $(\forall) \varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon, x)$, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $(\forall) n > n(\varepsilon, x)$.

Exemplu

Șirul de funcții $f_n(x) = \frac{x^4}{n^2}$ definit pe $\mathbb{R}$ este convergent pe $\mathbb{R}$ către funcția

$f(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$. Se caută un număr $n(\varepsilon, x)$, astfel încât $\frac{x^4}{n^2} < \varepsilon, (\forall) n > n(\varepsilon, x)$.

Rezultă $n^2 > \frac{x^4}{\varepsilon} \Rightarrow n(\varepsilon, x) = \frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Definiția 2.1.4. Se spune că șirul de funcții $(f_n)_n$ este **uniform convergent** pe X către funcția f , dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon)$, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, (\forall) n > n(\varepsilon)$ și $(\forall) x \in X$.

Observație. Un șir de funcții uniform convergent este și simplu convergent. Reciproca nu este adevărată.

Propoziția 2.1.5. Dacă șirul de funcții $(f_n)_n$, definit pe mulțimea X , satisface condițiile $|f_n(x)| \leq a_n, (\forall) x \in X, n \in \mathbb{N}$, unde $(a_n)_n$ este un șir de numere pozitive cu limita zero, atunci șirul $(f_n)_n$ converge uniform către funcția constantă zero.

Corolar

Dacă pentru un șir de funcții $(f_n)_n$ definite pe o mulțime X , există o funcție $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ și un șir de numere reale $(a_n)_n, a_n > 0$, pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < a_n, (\forall) x \in X$, atunci șirul de funcții $(f_n)_n$ converge uniform către funcția f .

Criteriul lui Cauchy

Șirul $(f_n)_n$ de funcții $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniform pe X către funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dacă și numai dacă: $(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n(\varepsilon)$ pentru care

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, (\forall) n, m > n(\varepsilon) \text{ și } (\forall) x \in I.$$

Teorema 2.1.6. Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții uniform convergent pe X către funcția f . Dacă toate funcțiile f_n sunt continue în punctul $a \in X$, atunci și funcția limită va fi continuă în punctul a .

Observații:

1) În cazul în care $a \in X \cap X'$, teorema 2.1.6 este valabilă sub forma mai generală: dacă șirul de funcții $(f_n)_n$ este uniform convergent pe $X \setminus \{a\}$, unde $a \in X \cap X'$ și dacă toate funcțiile f_n sunt continue în punctul a , atunci șirul de funcții $(f_n)_n$ este uniform convergent pe X și limita sa este continuă în a .

2) Teorema 2.1.6 rămâne valabilă dacă funcțiile f_n sunt continue la stânga (la dreapta) în punctul a și atunci funcția f va fi continuă la stânga (la dreapta) în punctul a .

3) Condiția ca șirul de funcții $(f_n)_n$ să fie uniform convergent pe mulțimea X este numai suficientă, nu și necesară, pentru ca funcția f să fie continuă într-un punct a .

Exemplu

Fie șirul de funcții $(f_n)_n$ definite prin $f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$. Pentru acesta, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 = f(x)$, $(\forall) x \in (0,1)$. Funcția f și funcțiile f_n sunt continue, dar șirul de funcții considerat nu este uniform convergent.

Corolar

Un șir $(f_n)_n$ de funcții continue pe X , uniform convergent pe X , are limita o funcție continuă pe X .

Teorema Dini. Dacă șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$, este simplu convergent către funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval compact și dacă $(f_n)_n$ este monoton în fiecare punct al lui I , iar funcțiile f_n și f sunt continue pe I , atunci convergența șirului este uniformă.

Teorema 2.1.7. Fie I un interval mărginit și $(f_n)_n$ un șir de funcții derivabile, definite pe I . Dacă $(f_n)_n$ converge uniform către f și șirul derivatelor $(f'_n)_n$ converge uniform pe I către o funcție g , atunci funcția f este derivabilă pe I și $f'(x) = g(x)$, $(\forall) x \in I$.

Observație

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Un șir de funcții $(f_n)_n$ poate fi uniform convergent către funcția f , cu f_n derivabile și f derivabilă, fără ca șirul derivatelor $(f'_n)_n$ să fie uniform convergent.

Exemplu

Șirul $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in [0, 2\pi]$ este uniform convergent pe $[0, 2\pi]$ către funcția $f(x) \equiv 0$, termenii șirului și funcția limită sunt derivabili pe $[0, 2\pi]$, dar șirul derivatelor $f'_n(x) = \cos nx$ nu este convergent pe $[0, 2\pi]$.

Teorema 2.1.8. Dacă $(f_n)_n$ este un șir de funcții continue, uniform convergent pe un interval $[a, b]$ către funcția f , atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Exemplu

Șirul de funcții $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$ definit pe $[0, \pi]$ este uniform convergent pe $[0, \pi]$ către funcția $f(x) \equiv 0$.

$$\text{Avem } \frac{1}{n} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2} \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} \rightarrow 0, \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

2. Serii de funcții

Definiția 2.2.1. Seria $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$, unde $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ este un șir de funcții definite pe aceeași mulțime X , se numește **serie de funcții**.

Notăție: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Pentru orice $x_0 \in X$ avem seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, serie care poate fi convergentă sau divergentă.

Definiția 2.2.2. Mulțimea punctelor $x \in X$ pentru care seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă se numește **mulțimea de convergență a seriei** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Exemplu

Cu șirul de funcții $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ se formează seria de funcții

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ care are mulțimea de convergență } (-\infty, \infty).$$

Definiția 2.2.3. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este **simplu convergentă** pe X către o funcție f , dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_n$, $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ este simplu convergent pe X către f , pentru orice x .

Funcția f definită pe X se numește suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definiția 2.2.4. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este **simplu convergentă** pe X către o funcție f , dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$ și pentru $(\forall) x \in X$ există un număr $n(\varepsilon, x)$, astfel încât pentru orice $n > n(\varepsilon, x)$ să avem

$$|f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exemplu

Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, este simplu convergentă pentru orice x real.

Pentru a demonstra aceasta, fie șirul sumelor parțiale:

$$s_n(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} \Rightarrow |s_n(x)| \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = u_n,$$

unde șirul cu termenul general u_n este convergent.

Definiția 2.2.5. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pentru $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este **uniform convergentă** pe $B \subseteq A \subseteq X$, unde A este mulțimea de convergență simplă, dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_n$ este uniform convergent pe B .

Definiția 2.2.6. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este **uniform convergentă** pe X către o funcție f , dacă pentru $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n(\varepsilon)$, astfel încât pentru orice $n > n(\varepsilon)$ să avem

$$|f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad (\forall) x \in X.$$

Exemplu

Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pentru aceasta, șirul sumelor parțiale $s_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{x-1}$ converge uniform către funcția $f(x) \equiv \frac{1}{1-x}$, deci seria este uniform convergentă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Criteriul general de convergență uniformă

Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $X \subset \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$, $(\forall) n > n_\varepsilon$, $(\forall) p \in \mathbb{N}^*$, $(\forall) x \in A$.

Criteriul lui Weierstrass

Fie șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale strict pozitive. Dacă $|f_n(x)| \leq a_n$, $(\forall) x \in X$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, și dacă seria de numere

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ este convergentă, atunci seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe X .

Exemplu

Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1, \infty)$. Aceasta este uniform convergentă pentru orice $x \in (1, \infty)$, deoarece pentru $(\forall) x \in (1, \infty)$, $(\exists) a \in (1, \infty)$, cu $a < x$; deci, $\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a}$, iar seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este convergentă.

Teorema 2.2.7. Fie șirul de funcții continue $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe X către f , atunci funcția f este continuă pe X .

Teorema 2.2.8. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergentă pe X către funcția f .

Dacă funcțiile f_n sunt derivabile pe X și seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ este uniform convergentă pe X către funcția g , atunci funcția f este derivabilă pe X și $f' = g$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$, $x \in [0, 2\pi]$, este uniform convergentă pe $[0, 2\pi]$, deoarece $\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$. Seria derivatelor este $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, care este uniform convergentă pe $[0, 2\pi]$, deoarece $\left| -\frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Notând cu $f(x)$ suma seriei considerate vom avea $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in [0, 2\pi]$.

Teorema 2.2.9. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergentă pe $[a, b]$ către funcția f . Dacă funcțiile f_n sunt integrabile pe $[a, b]$, atunci funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

Observație. Teorema servește nu numai pentru calculul integralei definite a unei serii de funcții, ci și a primitivelor pe orice interval conținut în mulțimea de convergență uniformă a seriei considerată.

Exemple

1) Seria trigonometrică $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} + \dots$ este uniform convergentă pentru orice x real.

$$\text{Rezultă că } \int f(x) dx = C + x + \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \dots + \frac{\sin nx}{n^3} + \dots$$

2) Seria de funcții $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ este uniform convergentă pentru orice $x \in (-1, 1)$ și are suma $\frac{1}{1-x}$. Deci, pentru $x \in (-1, 1)$ avem

$$\int \frac{1}{1-x} dx = C + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots = -\ln(1-x) + C'.$$

$$\text{Pentru } x=0, C=C' \Rightarrow \ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, |x| < 1.$$

3. Probleme rezolvate

2.3.1 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ este convergent, dar nu este uniform convergent pe $[0, 1]$.

Indicație de rezolvare:

Pentru $x \in [0, 1] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, deci șirul de funcții este simplu convergent către funcția constantă $f(x) = 0$, $(\forall) x \in [0, 1]$.

Pentru a arăta că nu este uniform convergent către f , se consideră $x_n = 2^{-1/n} \in [0, 1]$, pentru care $f_n(x_n) = \frac{1}{4}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin:

$$f_n(x) = \sqrt{(n^2 + 1) \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx} \text{ este uniform convergent.}$$

Indicație de rezolvare:

$$0 \leq f_n(x) = \frac{(n^2 + 1) \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2 + 1) \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n} + nx} + \sqrt{nx}} < \frac{(n^2 + 1) \cdot \frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}} < \frac{2\pi^2}{2\sqrt{n}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{n}}.$$

Utilizând teorema anterioară pentru $a_n = \frac{\pi^2}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, rezultă că șirul de funcții converge uniform către funcția constantă $f(x) = 0$.

2.3.3 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot e^{-nx}$ converge uniform către funcția $f(x) = 0$, $x \in [0, \infty)$.

2.3.4 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$ este uniform convergent pe intervalul indicat, pentru:

a) $f_n(x) = \frac{x^2}{(n^2 + x^4)}$, $x \in [1, \infty)$; **b)** $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, $x \in [3, 4]$;

c) $f_n(x) = \frac{x^n}{(1 + x^{2n})^n}$, $x \in [1, \infty)$; **d)** $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$, $x \in [0, \pi]$.

Indicație de rezolvare:

a) $0 \leq \frac{x^2}{n^2 + x^4} \leq \frac{1}{2n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$, de unde șirul de funcții converge uniform către funcția constantă zero;

b) $f(x) = 0$;

c) $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) = 0$;

d) $f(x) = 0$.

2.3.5 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$ converge simplu, dar nu converge uniform:

a) $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, $x \in (0, \infty)$;

b) $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$, $x \in [0, 1]$.

Indicație de rezolvare:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, deci șirul de funcții converge simplu către $f(x) = 0$; pentru

$x = n \Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, deci șirul nu converge uniform;

b) $f(x) = 0, x \in [0, 1]$ și $f(1) = \frac{1}{2}$. Se alege $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0, 1]$, pentru care

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}\right]^{-1} \rightarrow \frac{e}{e+1}, \text{ deci șirul nu converge uniform.}$$

2.3.6 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n 2^k \cdot \sin \frac{1}{3^k \cdot x} \text{ nu este uniform convergent.}$$

Indicație de rezolvare:

Se arată că nu se verifică criteriul lui Cauchy, adică $(\exists) \varepsilon > 0$, astfel încât pentru $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $(\exists) x_n \in (0, \infty)$ și $(\exists) p_n \in \mathbb{N}^*$ cu $|f_{n+p}(x_n) - f_n(x_n)| > \varepsilon$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| 2^{n+1} \cdot \sin \frac{1}{3^{n+1}x} + \dots + 2^{n+p} \cdot \sin \frac{1}{3^{n+p}x} \right|$$

și pentru $x = x_n = \frac{2}{3^{2n+1}\pi}$

$$\sin \frac{1}{3^{n+1}x_n} = \sin 3^n \cdot \frac{\pi}{2} = (-1)^n, \dots, \sin \frac{1}{3^{n+p}x_n} = \sin 3^{p-n-1} \cdot \frac{\pi}{2} = (-1)^{p-n-1}$$

și luând $p = n \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |f_{2n}(x) - f_n(x)| &= \left| 2^{n+1}(-1)^n + \dots + 2^{2n}(-1) \right| = \\ &= 2^{n+1} \left| 1 - 2 + 4 - \dots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} \right| > \frac{1}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2.3.7 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k(k+1)} \text{ este uniform convergent și limita sa este o funcție continuă pe } \mathbb{R}.$$

Indicație de rezolvare:

Se aplică criteriul lui Cauchy.

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)} \right| < \\ &< \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Deci, șirul de funcții este uniform convergent, iar funcțiile f_n fiind continue pe $\mathbb{R}$, rezultă că limita șirului va fi o funcție continuă pe $\mathbb{R}$.

2.3.8 Să se studieze convergența șirului de funcții $(f_n)_n$, $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Indicație de rezolvare:

Funcțiile f_n sunt continue pe intervalul compact $[0,1]$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = 0$, deci șirul este simplu convergent către funcția constantă $f \equiv 0$ continuă. De asemenea, șirul de funcții considerat este monoton descrescător în fiecare punct $x \in [0,1]$, deci conform Teoremei Dini, șirul este uniform convergent.

2.3.9 Să se determine mulțimea de convergență, A , pentru următoarele serii de funcții:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\};$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n, x \in \mathbb{R};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{1/2}) \cdot \dots \cdot (2-x^{1/n}), x > 0;$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \cdot \ln(1+a^n), a \geq 0, x \in \mathbb{R};$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{7n^2+3n+2} \cdot \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n, x \neq \frac{1}{2};$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 \cdot x^{2n}}, x \neq 0;$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{x}{3^n}, x \in \mathbb{R};$

$$\text{h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}, x \in \mathbb{R};$$

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}, x \neq 0.$$

Indicație de rezolvare:

a) pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ arbitrar fixat, se consideră seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, unde

$f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$. Pentru aceasta se studiază convergența absolută, utilizând criteriul rădăcinii.

Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \left| \frac{1-x}{1-2x} \right|$, de unde seria este absolut convergentă pentru

$\left| \frac{1-x}{1-2x} \right| < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. Pentru $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ seria este divergentă, deoarece nu este verificată condiția necesară de convergență a unei serii;

$$\text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|1-x^2|}{1+x^2} < 1,$$

pentru $(\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pentru $x=0$, se obține seria alternată $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n}$, care este convergentă.

Rezultă că mulțimea A de convergență a seriei de funcții este $\mathbb{R}$;

c) deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ și $x > 0$, rezultă că de la un anumit rang n_0 , termenii seriei de funcții vor avea același semn, căci $2 - \sqrt[n]{x} > 0$, $(\forall) n \geq n_0$. Se va obține, astfel, o serie cu termenii pozitivi, pentru care se aplică criteriul Raabe-Duhamel.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} - 1 \right] = \ln x, \text{ de unde rezultă că pentru } x > e \text{ seria este convergentă,}$$

pentru $x < e$ este divergentă, iar pentru $x = e$ seria este divergentă, utilizând criteriul al

doilea de comparație cu seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

De asemenea, pentru $x=2$ seria este convergentă, deoarece $f_n(2) = 0$.

Rezultă mulțimea de convergență $A = \{2\} \cup (e, \infty)$;

d) pentru $a \in [0, 1) \Rightarrow A = \emptyset$. Pentru $a = 1 \Rightarrow A = (1, \infty)$.

Pentru $a \in (1, \infty) \Rightarrow A = (2, \infty)$;

e) $A = (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right);$

f) $A = (-\infty, -1] \cup [1, \infty);$

g) $A = \square;$

h) $A = (0, \infty);$

i) $A = \emptyset.$

2.3.10 Fie funcția $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in (1, 2] \end{cases}$ și având proprietatea

$$f(x) = f(x+2). \text{ Fie } F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} \cdot f(4^n \cdot x). \text{ Să se arate că:}$$

a) F este continuă pe $\square$;

b) F nu este derivabilă pe $\square$.

Indicație de rezolvare:

a) f este continuă pe intervalul compact $[0, 2]$ și subunitară. Cum ea este periodică de perioadă 2, rezultă că este subunitară pe $\square$, deci mărginită.

Se demonstrează că seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} \cdot f(4^n \cdot x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) = f(x) + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot f(4 \cdot x) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot f(4^2 \cdot x) + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot f(4^n \cdot x)$$

Aplicând criteriul de convergență al lui Cauchy, se obține:

$$\begin{aligned} |s_{n+p}(x) - s_n(x)| &= \left| \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot f(4^{n+1} \cdot x) + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+p} \cdot f(4^{n+p} \cdot x) \right| \leq \\ &\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{p-1} \right] = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^p \right) \leq \\ &\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot 4 \rightarrow 0, \text{ pentru } n \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

rezultă că șirul sumelor parțiale este uniform convergent, deci seria este uniform convergentă și F este continuă;

b) fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat și $m \in \mathbb{N}$ fixat. Atunci $(4^m \cdot x) \in \mathbb{R}$ și deci există

$$k \in \mathbb{Z}, \text{ astfel încât } k \leq 4^m \cdot x \leq k+1 \Rightarrow \frac{k}{4^m} \leq x \leq \frac{k+1}{4^m}.$$

$$\text{Notăm } \alpha_m = \frac{k}{4^m}, \beta_m = \frac{k+1}{4^m} \Rightarrow \alpha_m \leq x \leq \beta_m.$$

Fie numerele reale $(4^n \cdot \alpha_m), (4^n \cdot \beta_m)$.

$$\text{Pentru } m = n \Rightarrow (4^n \cdot \beta_m - 4^n \cdot \alpha_m) = 4^{n-m}(k+1-k) = 4^{n-m} = 1.$$

$$\text{Pentru } n > m \Rightarrow (4^n \cdot \beta_m - 4^n \cdot \alpha_m) = 4^{n-m} = \text{nr. par.}$$

$$\text{Pentru } n < m \Rightarrow (4^n \cdot \beta_m - 4^n \cdot \alpha_m) = 4^{n-m} = \frac{1}{4^{m-n}}, \text{ de unde rezultă că, în acest}$$

caz, nu există nici un număr întreg cuprins între ele.

$$\text{Din acestea rezultă } \left| f(4^n \cdot \beta_m) - f(4^n \cdot \alpha_m) \right| = \begin{cases} 4^{n-m}, & n \leq m \\ 0, & n > m \end{cases} \text{ și deci:}$$

$$\begin{aligned} |F(\beta_m) - F(\alpha_m)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot f(4^n \cdot \beta_m) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot f(4^n \cdot \alpha_m) \right| = \\ &= \left| \sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4}\right)^n [f(4^n \cdot \beta_m) - f(4^n \cdot \alpha_m)] \right| = \sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 4^{n-m} = \\ &= \frac{1}{4^m} + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4^{m-1}} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4^{m-2}} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^m \geq \\ &\geq 1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^m = 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{m+1} \right] \rightarrow 4. \end{aligned}$$

$$\text{Cum } \lim_{m \rightarrow \infty} (\beta_m - \alpha_m) = 0, \text{ rezultă că } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F(\beta_m) - F(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = +\infty, \text{ deci } F \text{ nu este}$$

derivabilă pe $\mathbb{R}$.

4. TEST DE AUTOEVALUARE

1 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, definite prin $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \cdot \sin kx$, $x \in \mathbb{R}$, este convergent pe $\mathbb{R}$, iar limita sa este o funcție continuă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$.

2 Să se arate că șirul de funcții $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = n \cdot x \cdot e^{-nx^2}$ converge, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

3 Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_n$, definite prin $f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^2)}$, $x \in [0,1]$ converge neuniform pe $[0,1]$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

4 Să se determine mulțimea de convergență și uniform convergență a seriei $x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x} \right]$, $0 \leq x \leq 1$. Să se determine suma seriei.

5 Utilizând criteriul lui Weierstrass, să se studieze convergența seriilor de funcții:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^3}{1+n^3 \cdot x^4}$, $x \in \mathbb{R}$;
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \cdot \frac{\cos nx}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$;
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2^n}$, $x \in \mathbb{R}$;
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \sin \frac{1}{3^n \cdot x^2}$, $x \neq 0$, $|a| < 3$.

LECȚIA 4 - SERII DE PUTERI

1. Serii de puteri

Definiția 2.4.1. O serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, se numește **serie de puteri**.

Observație. Mulțimea de convergență a unei serii de puteri conține cel puțin un punct și anume punctul $x = 0$, pentru care seria de puteri este convergentă și are suma a_0 .

Există serii de puteri care au mulțimea de convergență formată dintr-un singur punct și există serii de puteri convergente pentru orice x real.

Exemple

1) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ este convergentă numai în punctul $x = 0$, deoarece pentru orice $x_0 \neq 0$ există un rang n pentru care $|n \cdot x_0| > 1$ și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} |n! \cdot x_0| = \infty$.

2) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este convergentă pe $\mathbb{C}$, deoarece pentru orice $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \left| \frac{u_{n-1}}{u_n} \right| = \frac{|x_0|}{n+1} \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Teorema I a lui Abel

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, există un număr $\rho \geq 0$, finit sau infinit, pentru care :

- a) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-\rho, \rho)$;
- b) seria este divergentă pentru $|x| > \rho$;
- c) pentru orice $r \in (0, \rho)$ seria de puteri este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

Numărul ρ se numește raza de convergență a seriei, iar $(-\rho, \rho)$ intervalul de convergență.

Observație. Teorema lui Abel nu spune nimic în legătură cu convergența sau divergența seriei de puteri în punctele din capetele intervalului de convergență.

Teorema 2.4.2 (d'Alembert)

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ finită sau infinită, atunci raza de convergență a seriei de puteri va fi:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < \infty; \\ 0, & \lambda = +\infty; \\ +\infty, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Teorema 2.4.3 (Cauchy-Hadamard)

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ finită sau infinită, atunci raza de convergență a seriei de puteri va fi:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < \infty; \\ 0, & \lambda = +\infty; \\ +\infty, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Corolar 2.4.4. Suma unei serii de puteri este o funcție continuă pe intervalul de convergență.

Corolar 2.4.5. Suma unei serii de puteri este uniform continuă pe orice interval compact conținut în intervalul de convergență.

Teorema 2.4.6. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ convergentă în intervalul $(-\rho, \rho)$.

Seria formată cu derivatele termenilor săi, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ va avea același interval de convergență.

Corolar 2.4.7

Dacă $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ și $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$, atunci $s'(x) = \varphi(x)$,
 $(\forall) x \in (-\rho, \rho)$.

Corolar 2.4.8. Suma seriei formată cu derivatele termenilor unei serii de puteri este o funcție continuă și derivabilă pe intervalul de convergență.

Corolar 2.4.9. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență ρ , atunci:

a) seria formată cu derivatele de ordinul n ale termenilor seriei are aceeași rază de convergență;

b) suma s a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este indefinit derivabilă pe intervalul de convergență și derivata de ordinul n este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n pentru orice $x \in (-\rho, \rho)$.

Teorema 2.4.10. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență ρ , atunci pentru orice interval închis $[a, b] \subset (-\rho, \rho)$ seria de puteri poate fi integrată termen cu termen și $\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n \cdot x^n dx$, unde $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ are raza de convergență $\rho = 1$.

Seria derivatelor $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$ are aceeași rază de convergență și are suma

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, deci suma seriei inițiale este $s(x) = C + \operatorname{arctg} x$. Pentru $x = 0$, $C = 0 \Rightarrow s(x) = \operatorname{arctg}(x)$.

2. Operații cu serii de puteri

Fie două serii de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ cu razele de convergență ρ_1 și ρ_2 . Atunci:

a) suma celor două serii de puteri este tot o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$, care are raza de convergență $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$. Dacă $A(x)$, $B(x)$ sunt sumele celor două serii de puteri și $S(x)$ este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$, atunci $S(x) = A(x) + B(x)$, $(\forall) x \in (-\rho, \rho)$;

b) diferența celor două serii de puteri este tot o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot x^n$, care are raza de convergență $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$; dacă $D(x)$ este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot x^n$, atunci $D(x) = A(x) - B(x)$, $(\forall) x \in (-\rho, \rho)$;

c) produsul celor două serii de puteri este tot o serie de puteri:

$$a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \cdot x + \dots + (a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n \cdot b_0) \cdot x^n + \dots,$$

care are raza de convergență $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$; dacă $P(x)$ este suma seriei produs, atunci $T(x) = A(x) \cdot B(x)$, $(\forall) x \in (-\rho, \rho)$;

d) câtu a două serii de puteri $A(x)$ și $B(x)$, $b_0 \neq 0$, este o serie de puteri

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n, \text{ cu coeficienții definiți de egalitatea } A(x) = B(x) \cdot C(x).$$

3. Serii Taylor și Mac-Laurin

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă pe intervalul I și fie un punct x_0 interior lui I . **Formula lui Taylor** pentru funcția f în punctul x_0 este:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + R_n(x), \quad x \in I.$$

Dacă șirul $(R_n(x))_n$, pentru $x \in X \subset I$ este convergent către zero, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n$ numită **seria Taylor a funcției f în punctul x_0** este convergentă pentru $x \in X \subset I$ către funcția f .

Formula $f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + \dots$ se numește **formula de dezvoltare** a funcției f în serie Taylor în jurul punctului x_0 .

Teorema 2.4.11. Seria Taylor a funcției f în jurul punctului x_0 este convergentă într-o vecinătate V a lui x_0 , dacă derivatele de orice ordin $f^{(n)}$ sunt egal mărginite pe V , adică $|f^{(n)}(x)| < M$, $(\forall) x \in V$.

Observație. Dacă $x_0 = 0$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) \cdot x^n$ se numește **serie Mac Laurin** pentru funcția f .

4. Probleme rezolvate

2.5.1 Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] \cdot x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \cdot x^n$; e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} \cdot x^n$, $a > 0$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot x^n$; g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot (x-1)^n$;

$$\text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot (x+3)^n ; \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot (x+3)^n .$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{a)} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right);$$

$$\text{b)} \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n + 3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n \left(1 + \frac{2^n}{3^n} \right)}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho = 3 \quad \text{și intervalul de}$$

convergență este $(-3, 3)$; pentru $x = 3$ și pentru $x = -3$ seria este divergentă, deoarece nu este verificată condiția necesară de convergență a unei serii, deci mulțimea de convergență este $(-3, 3)$;

$$\text{c)} \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \rho = \infty \quad \text{și deci mulțimea de convergență este}$$

$\square$;

$$\text{d)} \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right);$$

$$\text{e)} \square ;$$

$$\text{f)} (-1, 1);$$

$$\text{g)} \text{ se consideră seria de puteri } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n, y = x - 1, \text{ și se obține mulțimea de}$$

convergență $(0, 2]$;

$$\text{h)} -3;$$

$$\text{i)} (-e-3, e-3).$$

2.5.2 Să se determine raza de convergență pentru seriile de puteri:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \text{ unde } a_{2n} = \frac{1}{n}, a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n+1}};$$

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot x^n .$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{a)} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda \quad \text{și } \rho = \frac{1}{\lambda}; \text{ avem}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = \max \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = 1 \Rightarrow \rho = 1;$$

$$\text{b) } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

2.5.3 Dacă raza de convergență a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este $\rho \in (0, \infty)$, să se găsească raza de convergență a seriilor de puteri următoare:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n^m \cdot x^n, m \in \mathbb{N}^*; \text{ b) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{nm}, m \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 + |a_n|} \cdot x^n.$$

Indicație de rezolvare:

$$\text{a) } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \Rightarrow \rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n^m}{a_{n+1}^m} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|^m = \rho^m;$$

b) se notează $y = x^m$, rezultă că seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ are raza de convergență ρ , deci seria este absolut convergentă pentru $|y| < \rho \Rightarrow |x^m| < \rho \Rightarrow |x|^m < \rho \Rightarrow |x| < \sqrt[m]{\rho}$,
deci raza de convergență a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{nm}, m \in \mathbb{N}^*$ este $\rho_1 = \sqrt[m]{\rho}$;

$$\text{c) } \rho_1 = \max(\rho, 1).$$

2.5.4 Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}; \text{ b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{3n+1}}{3n+1}; \text{ d) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n;$$

Indicație de rezolvare:

a) se calculează raza de convergență a seriei de puteri.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\lambda} = 1. \text{ Intervalul de convergență este } (-1, 1).$$

Se studiază convergența în capetele intervalului.

Pentru $x=1$, se obține seria numerică alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$, care este

convergentă, iar pentru $x=-1$ se obține seria $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă.

Deci, mulțimea de convergență a seriei este $(-1,1]$.

Fie $f(x)$ suma seriei de puteri.

$$\text{Atunci } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n-1} = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1.$$

Prin integrare, se obține $f(x) = \ln(1+x) + C$, $x \in (-1,1)$. Pentru determinarea constantei de integrare C , se consideră $x=0$, de unde se obține $C=0$. Prin urmare, $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,1)$.

Deoarece seria de puteri este convergentă și în punctul $x=1$, rezultă că funcția $f(x)$ este continuă în acest punct și $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \ln 2$;

b) mulțimea de convergență este $[-1,1]$. Fie $f(x)$ suma seriei de puteri. Atunci

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1. \text{ Deci, } f(x) = \arctg x + C \text{ și pentru } x=0 \text{ se}$$

va obține $C=0$, deci suma seriei de puteri este $f(x) = \arctg x$, $x \in (-1,1)$. Cum seria de puteri este convergentă și în capetele intervalului de convergență, rezultă

$$f(-1) = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} \text{ și } f(1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4};$$

c) mulțimea de convergență este $(-1,1]$. Notând cu $f(x)$ suma seriei de puteri,

$$\text{rezultă } f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}, \text{ de unde}$$

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}};$$

d) mulțimea de convergență este $(-1,1)$. Pentru calculul sumei seriei de puteri se

pleacă de la seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$, care are suma

$$g(x) = \frac{x}{1-x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

rezultă că suma seriei de puteri este $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$;

2.5.5 Să se demonstreze că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ este convergentă pentru orice $x \in [-1, 1]$,

iar suma ei f verifică ecuația

$$(1-x) \cdot f'(1-x) - x \cdot f'(x) = \ln \frac{1-x}{x}, \quad x \in (0, 1).$$

Indicație de rezolvare:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow \rho = 1, \text{ deci intervalul de convergență este } (-1, 1).$$

Pentru $x = 1$, se obține seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, care este convergentă.

Pentru $x = -1$, se obține seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, convergentă, cu Leibniz.

Deci, mulțimea de convergență este $[-1, 1]$.

$$\text{Se consideră } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \Rightarrow x \cdot f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$\text{Fie } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Rightarrow g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (0, 1).$$

Rezultă că $g(x) = -\ln(1-x)$.

$$x \cdot f'(x) = -\ln(1-x) \Rightarrow (1-x) \cdot f'(1-x) = -\ln x \text{ și se verifică ecuația dată.}$$

2.5.6 Să se arate că seria de puteri $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n-1)(3n)}$ este

convergentă pe $\square$ și că suma ei verifică ecuația

$$f''(x) + x \cdot f'(x) = 0, \quad (\forall) x \in \square.$$

Indicație de rezolvare:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \Rightarrow \rho = \infty, \text{ deci seria de puteri este convergentă pe } \square.$$

Notându-se cu $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n-1)(3n)}$, rezultă

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n-1}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (3n-1)} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = -x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n-2}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (3n-3)}$$

și prin înlocuire se verifică ecuația dată.

2.5.8 Să se determine o serie de puteri convergentă pe $\mathbb{R}$ și astfel încât suma f a ei să verifice ecuația

$$x \cdot f''(x) + f'(x) + x \cdot f(x) = 0, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Indicație de rezolvare:

Se caută f de forma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Derivând de două ori termen cu termen, obținem:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \quad \text{și} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2},$$

pe care înlocuindu-le în ecuația ce trebuie verificată, rezultă identitatea

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 a_n + a_{n-2}) \cdot x^{n-1} = 0, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

De aici rezultă că $a_1 = 0$, $n^2 \cdot a_n + a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \dots$, adică

$$a_{2k-1} = 0 \text{ și } a_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{a_0}{4^k \cdot (k!)^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pentru $a_0 = 1 \Rightarrow 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{4^k \cdot (k!)^2}$, care este o serie de puteri convergentă pe $\mathbb{R}$.

5. TEST DE AUTOEVALUARE

1] Să se determine mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (2n-1) \cdot x^{2n-2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) \cdot x^n$;

d) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} \cdot x^n$, $a \in \mathbb{R}$.

2] Fie un polinom $P \in \mathbb{R}[X]$. Să se calculeze suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cdot \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

3] Să se arate că funcțiile:

a) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $h(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, se pot dezvolta în serie de puteri pe $\mathbb{R}$ și să se determine seriile Mac Laurin corespunzătoare.

4] Să se arate că funcțiile următoare se pot dezvolta în serie de puteri și să se găsească dezvoltarea, precizându-se intervalul în care aceasta este adevărată:

a) $f(x) = (1+x)^a$, $x > -1$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$;

b) $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$.

5] Să se demonstreze inegalitatea $e^x > \frac{(n+1)^n}{n!}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

6] Să se calculeze, utilizând formula lui Taylor, limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

6. TEMĂ DE CONTROL

1 Să se demonstreze că seriile următoare sunt convergente pe mulțimile indicate, iar sumele lor sunt funcții continue pe aceste mulțimi:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^2}}, x \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}, x \in \mathbb{R};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, 0 \leq x < \infty$, unde seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă.

2 Este posibil ca o serie de funcții continue pe o mulțime X să convergă neuniform pe această mulțime către o funcție continuă?

3 Este posibilă derivarea termen cu termen a seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-nx^2} - e^{-(n-1)x^2} \right], x \in [0,1];$

b) $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2n} \ln(1+n^4 x^2) - \frac{1}{2(n-1)} \ln(1+(n-1)^4 x^2) \right], x \in [0,1]?$

4 Este posibilă integrarea termen cu termen a seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x \left[n^2 e^{-n^2 x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2} \right], x \in [0,1]?$$

5 Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2})$ converge neuniform pe $[0,1]$ și totuși

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) dx.$$

6 Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

a) Să se determine mulțimea de convergență și să se calculeze suma ei.

b) Să se arate că suma seriei de puteri, S , verifică ecuația diferențială $x \cdot S'(x) + S(x) = \frac{1}{1-x^2}$ și ecuația funcțională $S\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = (1+x^2) \cdot S(x)$.

7 Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcții:

a) $f(x) = \frac{8-2x}{x^2-8x+15};$

b) $f(x) = \frac{2-x-x^2}{(1-x)(1-x^2)};$

c) $f(x) = \ln(2-3x+x^2);$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

e) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right);$

f) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$

g) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x};$

h) $f(x) = \frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2};$

i) $f(x) = \frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$

8 Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcțiilor de sub integrale, să se demonstreze:

a) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12};$

b) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}.$

7. BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE ÎNVĂȚARE Nr. 1

1. **D. M. Băținețu-Giurgiu, M. Băținețu, V. Gârban**, *Analiză matematică, Exerciții și probleme*, Editura Militară, București, 1992
2. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
3. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
4. **M. Craiu, M. Roșculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976
5. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră și analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978, 1979, Editura ALL, 1993, 1994
6. **I. P. Elianu**, *Principii de analiză matematică*. Calcul diferențial, Editura Academiei Militare, București, 1976
7. **P. Flondor, O. Stănășilă**, *Lecții de analiză matematică*, Editura ALL, 1993
8. *Analiză matematică*, vol. I, Ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
9. **E. Popescu**, *Analiză matematică. Structuri fundamentale*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1998
10. **M. Roșculeț**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973
11. **M. Roșculeț**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968
12. **I. Sprințu**, *Elemente de analiză matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 2001
13. **O. Stănășilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
14. **I. Sprințu, V. Garban**, *Analiză matematică I. Calcul diferențial și integral*, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 2003